



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

P. D. Lebedev, A. A. Uspenskii, Construction of a solution to a velocity problem in the case of violation of the smoothness of the curvature of the target set boundary, *Izv. IMI UdGU*, 2019, Volume 53, 98–114

DOI: <https://doi.org/10.20537/2226-3594-2019-53-09>

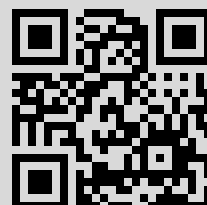
Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 213.142.35.54

September 28, 2020, 12:31:02



УДК 517.977

© П. Д. Лебедев, А. А. Успенский

## ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ПРИ НАРУШЕНИИ ГЛАДКОСТИ КРИВИЗНЫ ГРАНИЦЫ ЦЕЛЕВОГО МНОЖЕСТВА

В развитие аналитических и численных алгоритмов построения негладких решений задач оптимального управления предложены процедуры конструирования рассеивающих кривых для одного класса задач управления по быстродействию. Рассматриваются задачи о приведении за минимальное время решений динамической системы с круговой вектограммой скоростей для случая, когда целевое множество, вообще говоря, невыпуклое, при этом его граница имеет точки, в которых нарушается гладкость кривизны. Указанные точки относят к псевдовершинам — характеристическим точкам целевого множества, отвечающим за возникновение сингулярности функции оптимального результата. При формировании надлежащей (в данном случае учитывающей геометрию вектограммы скоростей управляемой системы) перепараметризации дуги границы целевого множества, содержащей псевдовершину, рассеивающая кривая конструируется в виде интегральной кривой. При этом начальные условия соответствующей задачи Коши определяются свойствами псевдовершины. Одна из числовых характеристик псевдовершины, маркер псевдовершины, определяет начальную скорость материальной точки, описывающей гладкий участок рассеивающей кривой. Указанный подход к выявлению и построению (в аналитическом или численном виде) сингулярных кривых ранее обоснован для ряда различных по порядку гладкости случаев границы цели. Следует подчеркнуть, что рассматриваемый в работе случай является наиболее специфичным, в частности, из-за выявленной связи динамической задачи с задачей алгебры многочленов. Доказано, что маркер псевдовершины является неположительным корнем некоторого многочлена третьего порядка, коэффициенты которого определяются односторонними производными кривизны в псевдовершине границы целевого множества. Эффективность развиваемых теоретических методов и численных процедур проиллюстрирована на конкретных примерах.

*Ключевые слова:* задача быстродействия, рассеивающая кривая, биссектриса множества, псевдовершина, функция оптимального результата, кривизна.

DOI: 10.20537/2226-3594-2019-53-09

## Введение

Изучение задачи быстродействия с круговой вектограммой скоростей проводится на основе выделения биссектрисы целевого множества. В плоском случае биссектриса [1, 2] цели совпадает с объединением рассеивающих кривых. Исследуются свойства псевдовершин — характеристических точек целевого множества, отвечающих за возникновение сингулярности функции оптимального результата. Ранее подробно исследован ряд частных ситуаций. Рассмотрен случай, когда кривизна границы цели в псевдовершине является гладкой функцией, а также случай, при котором классическая кривизна в псевдовершине не определена, но при этом существуют ее односторонние не равные друг другу предельные значения. Для указанных ситуаций выписаны соотношения, позволяющие конструировать сингулярные множества и исходящие с него оптимальные траектории. Представляет естественный интерес выявление структуры сингулярности решения задачи быстродействия в ситуации, когда кривизна границы целевого множества определена в окрестности псевдовершины, но при этом не является в этой точке гладкой функцией. В данной работе найдены предельные, дифференциальные и алгебраические соотношения для координат точек, порождающих рассеивающие кривые в окрестности псевдовершины с указанными свойствами кривизны. Предложены аналитические и численные процедуры построения сингулярных кривых.

## § 1. Постановка задачи и основные определения

Рассматривается задача управления по быстродействию на евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$  с целевым множеством  $M \subset \mathbb{R}^2$ . В ней требуется привести решения системы с текущими координатами  $x = (x, y)$  на  $M$  за кратчайшее время. Движение точки

$$\dot{x} = v \tag{1.1}$$

задается управлением  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ , которое берется из круга единичного радиуса с центром в начале координат, то есть  $\mathbf{v} \in O(\mathbf{0}, 1)$ , где  $O(\mathbf{c}, r) \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2: \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| \leq r\}$ ,  $\mathbf{0} \triangleq (0, 0)$ .

Задача управления считается решенной, если удалось построить функцию оптимального результата. Для рассматриваемого класса задач эта функция в случае невыпуклого целевого множества является негладкой, ее линии уровня содержат изломы, поточечное объединение которых образует совокупность рассеивающих кривых.

Задача быстрогодействия с динамикой (1.1) представляет самостоятельный интерес. Важно отметить, что разработка методов ее решение обогащает новыми подходами процедуры построения негладких решений задач смежных разделов математики. Рассмотрим краевую задачу Дирихле для уравнения Гамильтона–Якоби [3]:

$$\min_{\mathbf{v} \in O(\mathbf{0}, 1)} \langle Du(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle + 1 = 0 \quad (1.2)$$

с краевым условием

$$u|_{\partial M} = 0. \quad (1.3)$$

Здесь  $\partial M$  — граница множества  $M$ ,  $Du(\mathbf{x})$  означает градиент функции  $u(\mathbf{x})$  в точке  $\mathbf{x}$ ;  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение векторов. Минимаксное решение задачи Дирихле (1.2), (1.3) (в определении, введенном А.И. Субботиным [3]) совпадает с функцией оптимального результата  $u(x, y)$  задачи быстрогодействия на множестве  $G = \mathbb{R}^2 \setminus M$  (см. [1, теорема 1]).

В задаче быстрогодействия с динамикой (1.1) при  $\mathbf{x} \notin M$  оптимальным управлением  $\mathbf{v}$  является вектор единичной нормы, сонаправленный с вектором от точки  $\mathbf{x}$  до ближайшей к ней в евклидовой метрике точки  $\mathbf{y}$  границы множества  $M$ . Функция оптимального результата  $u(\mathbf{x}) = u(x, y)$  (равная минимальному времени, за которое точка, двигаясь с заданным управлением, может достичь  $M$ ) совпадает с евклидовым расстоянием  $\rho(\mathbf{x}, M) \triangleq \min\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|: \mathbf{y} \in M\}$  от точки  $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  до множества  $M$ .

Рассмотрим основное уравнение геометрической оптики — уравнение эйконала

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 1, \quad (1.4)$$

которое описывает распространение излучения (в данном случае в изотропной среде). В задаче Дирихле для уравнения (1.4) с краевым условием (1.3) С.Н. Кружков ввел так называемое фундаментальное (обобщенное) решение, которое отличается от  $u(x, y)$  знаком:  $u_k(x, y) = -\rho((x, y), M)$  (подробнее см. [4]). Его смысл — это величина оптического пути между точкой  $\mathbf{x}$  и множеством  $M$ .

В данной статье будем рассматривать случай множества  $M$ , граница которого  $\Gamma$  есть плоская кривая, заданная параметрическим уравнением

$$\Gamma = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2: \mathbf{y} = \mathbf{y}(t), t \in \Xi\}. \quad (1.5)$$

Здесь  $\Xi \subseteq \mathbb{R}$  — замкнутое односвязное множество, а отображение  $\mathbf{y}: \Xi \rightarrow \mathbb{R}^2$  является непрерывным на  $\Xi$ , дважды дифференцируемым во всех внутренних точках  $\Xi$  и трижды дифференцируемым во всех внутренних точках  $\Xi$  за исключением, может быть, конечного числа точек.

## § 2. Рассеивающие кривые в задаче быстрогодействия

Если множества  $M$  выпукло, то функция  $u(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, M)$  выпукла на всей плоскости  $\mathbb{R}^2$  и дифференцируема на множествах  $G$  и  $\text{int } M$ , единственной областью негладкости является кривая  $\Gamma$  (см. [5, гл. II, § 8]). Если же множество  $M$  не выпукло, то у  $u(\mathbf{x})$  возникают сингулярные множества, на которых  $u(\mathbf{x})$  теряет гладкость на  $G$ .

**О п р е д е л е н и е 2.1.** Множеством  $\Omega_M(\mathbf{x})$  проекций точки  $\mathbf{x}$  на множество  $M$  назовем объединение всех точек  $\mathbf{y} \in M$ , ближайших в евклидовой метрике к  $\mathbf{x}$ .

**О п р е д е л е н и е 2.2.** Биссектрисой  $L(M)$  замкнутого множества  $M \subset \mathbb{R}^2$  назовем множество всех точек, для которых множество  $\Omega_M(\mathbf{x})$  состоит из двух или более элементов:

$$L(M) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2: \exists \mathbf{y}_1 \in \Omega_M(\mathbf{x}), \mathbf{y}_2 \in \Omega_M(\mathbf{x}) (\mathbf{y}_1 \neq \mathbf{y}_2)\}.$$

По классификация Р. Айзекса [6, Пример 6.10.1] биссектриса есть объединение рассеивающих кривых в задаче быстрогодействия. Из каждой точки этого множества выходит более одной оптимальной траектории. В то же время  $L(M)$  можно трактовать как геометрическое место центров кругов  $O(x, \rho(x, M))$  таких, что ограничивающие их окружности касаются границы  $\partial M$  множества  $M$  в двух и более точках. Биссектриса является частным случаем так называемых множеств симметрии [7, 8].

Будем далее обозначать  $t_1$  и  $t_2$  — параметры, задающие проекции одной точки  $x \in L(M)$  биссектрисы множества  $M$ , а  $x = x(t_1, t_2)$  — данную точку. Введем также множество  $\Pi(\Gamma)$  всех пар  $(t_1, t_2)$  параметров, которые задают проекции точек биссектрисы. В дальнейшем полагаем, что нам известна (нами выявлена) связь между параметрами  $t_1$  и  $t_2$ , и эта связь выражается гладким скалярным отображением  $t_2(t_1)$ . Аналитические и вычислительные подходы к построению таких функций приведены в работах [9, 10].

За зарождение рассеивающих кривых в задаче быстрогодействия отвечают характеристические точки целевого — псевдовершины.

**Определение 2.3.** Будем называть точку  $y_0 = y(t_0)$  псевдовершиной множества  $M$ , а  $x_0$  — соответствующей ей крайней точкой биссектрисы, если существует последовательность  $\{(\bar{y}_n, \tilde{y}_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset M$  пар точек множества  $M$  и последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L(M)$  точек биссектрисы, для которых выполняются условия

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{y}_n, \tilde{y}_n) &= (y_0, y_0), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= x_0, \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad (\bar{y}_n, \tilde{y}_n) &\subset \Omega_M(x_n).\end{aligned}$$

Ключевой характеристикой плоской кривой (1.5) служит ее кривизна [11, гл. III, § 26], вычисляемая по формуле

$$k(t) = \frac{y''(t) \wedge y'(t)}{\|y'(t)\|^{3/2}}, \quad (2.1)$$

где  $(a_1, a_2) \wedge (b_1, b_2) = a_1 b_2 - a_2 b_1$  означает псевдоскалярное произведение векторов.

Различные типы псевдовершин ранее классифицированы в работах [2, 12]. В случае, если в псевдовершине  $y_0$  определена кривизна  $k(t_0)$  границы  $\Gamma$ , то соответствующая ей крайняя точка  $x_0$  есть центр кривизны [11, гл. III, § 25] кривой  $\Gamma$  в  $y_0$ . При этом граница  $\partial O(x_0, \|x_0 - y_0\|)$  круга  $O(x_0, \|x_0 - y_0\|)$  есть соприкасающаяся окружность к  $\Gamma$  в точке  $y_0$ . В работе [2] показано, что если кривизна  $k(t)$  определена в псевдовершине  $y_0$ , то модуль  $|k(t)|$  достигает при  $t = t_0$  локального максимума. Возможны принципиально другие случаи, когда в псевдовершине  $y_0$  определена касательная к  $\Gamma$ , но не определена кривизна (см. [10]); или когда в псевдовершине  $y_0$  имеет место нарушение гладкости кривой  $\Gamma$  (см. [12]). Но в рамках данной статьи ограничимся рассмотрением участков границы целевого множества, которые имеют второй порядок гладкости.

При решении задачи быстрогодействия необходимо знать характер поведения координат проекций точек биссектрисы в окрестности псевдовершины. Это позволяет конструировать фрагменты рассеивающих кривых в виде дуг интегральных кривых для дифференциального уравнения

$$\frac{dt_2}{dt_1} = g(t_1, t_2), \quad (2.2)$$

связывающего параметры  $t_1$  и  $t_2$ , а по ним строить точки  $x(t_1, t_2) \in L(M)$  [9]. Знание координат псевдовершины дает возможность найти начальные условия для решения этого уравнения. Однако поскольку сама псевдовершина в общем случае не является проекцией точки из  $L(M)$ , то нужно доопределить значение функции  $g(t_2, t_1)$  при  $t_1 = t_2 = t_0$  пределом  $\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{t_2(t_1) - t_0}{t_1 - t_0}$ . Его знание позволяет корректно сформулировать задачу Коши для дифференциального уравнения (2.2), решение которой задает координаты точек гладкого участка рассеивающей кривой. Отдельной задачей является выявление точек бифуркации, в которых сходятся три и более гладких ветвей множества  $L(M)$ . Они находятся как точки  $x \in L(M)$ , имеющие более двух проекций на целевое множество  $M$ .

### § 3. Структура оптимальных траекторий в окрестности псевдовершины

В работе [14] показано, что в случае, если кривизна  $k(t)$  в псевдовершине  $y_0 = y(t_0)$  определена и является гладкой функцией, то для параметров  $t_1 < t_0 < t_2$ , где  $t_2 = t_2(t_1)$ , задающих координаты проекций точек биссектрисы выполняется предельное соотношение

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{t_2(t_1) - t_0}{t_1 - t_0} = -1. \quad (3.1)$$

В развиваемой теории такие односторонние пределы дифференциальных отношений, которые будем называть маркерами соответствующих псевдовершин, играют особую роль. С помощью них, в частности, корректным образом доопределяются правые части обыкновенных дифференциальных уравнений, решения которых выделяют гладкие ветви сингулярного множества. Поскольку модуль кривизны в псевдовершине достигает максимума, а значит  $k(t)$  имеет при  $t = t_0$  локальный экстремум, то для ее производной справедливо равенство

$$k'(t_0) = 0. \quad (3.2)$$

Рассмотрим более сложный случай псевдовершины  $y_0 = y(t_0)$ , в которой определена кривизна  $k(t)$  кривой  $\Gamma$ , но ее односторонние производные слева и справа не совпадают. Это означает, что в точке  $t_0$  имеет место разрыв производной третьего порядка  $y'''(t)$  вектор-функции  $y(t)$ .

**Теорема 3.1.** Пусть  $y_0 = y(t_0)$  — псевдовершина множества  $M$ . При этом в точке  $t_0$  выполняется  $\|y'(t_0)\| \neq 0$  и определены односторонние пределы  $k'(t_0 - 0)$  и  $k'(t_0 + 0)$  производной кривизны, причем  $k'(t_0 + 0) \neq 0$ . Тогда если для параметров  $t_1 < t_0 < t_2$ , где  $t_2 = t_2(t_1)$ , задающих координаты проекций точек биссектрис, выполняется предельное соотношение

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{t_2(t_1) - t_0}{t_1 - t_0} = c, \quad (3.3)$$

то значение (3.3) (так называемый маркер псевдовершины  $c$ ) равно отрицательному или равному нулю корню уравнения

$$k'(t_0 + 0)c^3 - 3k'(t_0 + 0)c^2 + 3k'(t_0 - 0)c - k'(t_0 - 0) = 0. \quad (3.4)$$

**Доказательство.** Покажем, что в некоторой окрестности псевдовершины параметры  $t_1$  и  $t_2$  связаны дифференциальным уравнением (2.2) таким, что выполняется предельное соотношение

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} g(t_1, t_2(t_1)) = c, \quad (3.5)$$

где  $t_2(t_1)$  — параметр, задающий координаты точки  $y(t_2(t_1))$  такой, что  $y(t_1)$  и  $y(t_2(t_1))$  являются проекциями одной точки биссектриса  $x$ , а  $c$  — корень уравнения (3.4).

Без ограничения общности полагаем, что система координат выбрана так, чтобы кривая  $\Gamma$  в некоторой окрестности псевдовершины  $y_0$  совпадала с графиком функции  $y = y(x)$ . В качестве параметра  $t$ , задающего точки на кривой, будем использовать их абсциссу  $x$ . Тогда точки  $y(t_i)$  будут иметь координаты  $(x_i, y(x_i))$ ,  $i = 1, 2$ . При этом начало координат и направления осей выбраны так, чтобы псевдовершина имела координаты  $(0, 0)$ , а для первых и вторых производных выполнялись оценки

$$y'(0) = 0,$$

$$y''(0) \geq 0.$$

Покажем, что в этом случае для абсцисс  $x_1 < 0 < x_2$  проекций точек биссектрисы выполняется соотношение

$$\lim_{x_1 \rightarrow -0} \frac{x_2}{x_1} = c, \quad (3.6)$$

где  $c$  — отрицательный или равный нулю корень уравнения

$$y'''(+0)c^3 - 3y'''(+0)c^2 + 3y'''(-0)c - y'''(-0) = 0. \quad (3.7)$$

Формула (2.1) для графика явно заданной функции имеет вид

$$k(x) = \frac{y''(x)}{(1 + y'(x)^2)^{3/2}}.$$

Значения односторонних производных кривизны

$$k'(x-0) = \frac{y'''(x-0)(1 + y'(x)^2) - 3y''(x)y'(x)}{(1 + y'(x)^2)^{5/2}}, \quad (3.8)$$

$$k'(x+0) = \frac{y'''(x+0)(1 + y'(x)^2) - 3y''(x)y'(x)}{(1 + y'(x)^2)^{5/2}}. \quad (3.9)$$

Примем обозначения для значений функции  $y(x)$  и ее производных:

$$y_i = y(x_i), \quad y'_i = f'(x_i), \quad y''_i = f''(x_i), \quad i = 1, 2.$$

Как показано в работе [9], в случае, если у точки биссектрисы ровно две проекции, то в их окрестности для параметров, задающих проекции точки  $L(M)$ , выполняется дифференциальное уравнение (2.2), в котором правая часть равна

$$g(t_1, t_2) = -\frac{k(t_1) - r^{-1}(t_1, t_2)}{k(t_2) - r^{-1}(t_1, t_2)}, \quad (3.10)$$

где

$$r(t_1, t_2) = \rho(\mathbf{x}(t_1, t_2), M) = \frac{\|\mathbf{y}(t_2) - \mathbf{y}(t_1)\|}{2 \sin(\angle(\mathbf{y}(t_2), \mathbf{y}'(t_1))/2)}$$

— функция определенная на множестве  $\Pi(\Gamma)$ , равная расстоянию от точки биссектрисы  $\mathbf{x}(t_1, t_2)$  до множества  $M$ ,  $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  — угол между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .

Рассмотрим в качестве параметра  $t$  абсциссу  $x$  и выполним линеаризацию функции (3.10) в окрестности точки  $(0, 0)$ . Из условий теоремы и формулы (3.8) и принятого допущения о расположении псевдовершины следует

$$k(x_1) = k(0) + k'(-0)x_1 + o(x_1) = y''(0) + y'''(-0)x_1 + o(x_1), \quad (3.11)$$

где  $o(x_1)$  — бесконечно малая величина более высокого порядка, чем  $x_1$ , то есть

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} o(x_1)x_1^{-1} = 0.$$

Из формулы (3.9) аналогично

$$k(x_2) = k(0) + k'(0)x_2 + o(x_2) = y''(0) + y'''(+0)x_2 + o(x_2).$$

Рассмотрим теперь функцию  $r(x_1, x_2)$  в окрестности точки  $(0, 0)$ . Из свойств биссектрисы известно [13], что в ее точке прекращения  $\mathbf{x}_0$ , соответствующей псевдовершине  $\mathbf{y}_0$ , определена односторонняя касательная  $\gamma$ , которая совпадает с нормалью к кривой  $\Gamma$ . При этом в случае дважды гладкой кривой  $\Gamma$  точка  $\mathbf{x}_0$  есть центр кривизны  $\Gamma$  в точке  $\mathbf{y}_0$ . Поскольку точки проекций при стремлении  $x_1$  и  $x_2$  к 0 движутся по кривой, ортогональной к  $\gamma$ , то приращения первой степени по  $x_1$  и  $x_2$  будут зависеть только от ординаты  $y^*$  точки биссектрисы. Для  $y^*$  ранее получена формула [2]

$$y^* = \frac{(x_2 + y'_2 y_2) - (x_1 + y'_1 y_1)}{y'_2 - y'_1}.$$

Поэтому можно записать

$$r(x_1, x_2) - k^{-1}(0) = y^* - k^{-1}(0) + o(x_1) + o(x_2).$$

Расписав по формуле Тейлора значения функции  $y(x)$  и ее производных, имеем

$$\begin{aligned} y^{*-1} &= \frac{y''(0)x_2 + 0.5y'''(+0)x_2^2 - y''(0)x_1 + 0.5y'''(-0)x_1^2}{(x_2 + (y''(0)x_2 + o(x_2))o(x_2)) - (x_1 + (y''(0)x_1 + o(x_1))o(x_1))} = \\ &= \frac{y''(0)(x_2 - x_1) + 0.5y'''(+0)x_2^2 - 0.5y'''(-0)x_1^2}{x_2 - x_1 + o(x_1^2) + o(x_2^2)} = \\ &= y''(0) + \frac{0.5y'''(+0)x_2^2 - 0.5y'''(-0)x_1^2}{x_2 - x_1} + o(x_1) + o(x_2). \end{aligned}$$

Соответственно, для величины, обратной к  $r(x_1, x_2)$  справедлива линеаризация

$$r^{-1}(x_1, x_2) = y^{*-1} + o(x_1) + o(x_2) = y''(0) + \frac{0.5y'''(+0)x_2^2 - 0.5y'''(-0)x_1^2}{x_2 - x_1} + o(x_1) + o(x_2). \quad (3.12)$$

С помощью формул (3.11)–(3.12) можно записать линеаризацию функции (3.10)

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dx_1} &= -\frac{k(x_1) - r^{-1}(x_1, x_2)}{k(x_2) - r^{-1}(x_1, x_2)} = \\ &= -\frac{y''(0) + y'''(-0)x_1 - y''(0) - (0.5y'''(+0)x_2^2 - 0.5y'''(-0)x_1^2)/(x_2 - x_1)}{y''(0) + y'''(+0)x_2 - y''(0) - (0.5y'''(+0)x_2^2 - 0.5y'''(-0)x_1^2)/(x_2 - x_1)} = \\ &= -\frac{y'''(-0)x_1 - (0.5y'''(+0)x_2^2 - 0.5y'''(-0)x_1^2)/(x_2 - x_1) + o(x_1) + o(x_2)}{y'''(+0)x_2 - (0.5y'''(+0)x_2^2 - 0.5y'''(-0)x_1^2)/(x_2 - x_1) + o(x_1) + o(x_2)}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

В свою очередь из (3.6) можно записать для  $x_2$  линеаризацию  $x_2 = cx_1 + o(x_1)$ . Поэтому можно получить из (3.13)

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dx_1} &= -\frac{y'''(-0)x_1 - (0.5y'''(+0)c^2x_1^2 - 0.5y'''(-0)x_1^2)/(-cx_1 - x_1) + o(x_1)}{y'''(+0)cx_1 - (0.5y'''(+0)c^2x_1^2 - 0.5y'''(-0)x_1^2)/(-cx_1 - x_1) + o(x_1)} \\ &= -\frac{y'''(-0) - (0.5y'''(+0)c^2 - 0.5y'''(-0))/(-c - 1) + o(x_1)}{y'''(+0)c - (0.5y'''(+0)c^2 - 0.5y'''(-0))/(-c - 1) + o(x_1)} = \\ &= -\frac{2y'''(-0)(-c - 1) - (y'''(+0)c^2 - y'''(-0)) + o(x_1)}{2y'''(+0)c(-c - 1) - (y'''(+0)c^2 - y'''(-0)) + o(x_1)}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

К бесконечно малым величинам  $x_1$  и  $x_2$  и их производным по  $x_1$  можно применить правило Лопиталя

$$\lim_{x_1 \rightarrow -0} \frac{x_2}{x_1} = \lim_{x_1 \rightarrow -0} \left( \frac{dx_2/dx_1}{dx_1/dx_1} \right) = \lim_{x_1 \rightarrow -0} \frac{dx_2}{dx_1},$$

поскольку значение производной в знаменателе правой части тождественно равно 1, а значит отлично от нуля.

По правилу Лопиталя значение выражения (3.14) при  $x_1 \rightarrow -0$  должно совпадать с пределом (3.3). Получаем уравнение

$$c = -\frac{2y'''(-0)(-c - 1) - (y'''(+0)c^2 - y'''(-0))}{2y'''(+0)c(-c - 1) - (y'''(+0)c^2 - y'''(-0))}.$$

Умножив обе части уравнения на знаменатель дроби в правой части, получим

$$c(2y'''(+0)c(-c - 1) - (y'''(+0)c^2 - y'''(-0))) = -2y'''(-0)(-c - 1) + (y'''(+0)c^2 - y'''(-0)).$$

После приведения подобных членов оно преобразуется к уравнению (3.7).

Покажем, что значения пределов (3.3) и (3.6) совпадают. Если выразить приращения параметров  $x$  и  $t$  через длину  $s$  кривой  $\Gamma$ , то имеет место  $dx = ds$ ,  $dt = ds/\|\mathbf{y}'(t)\|$ . Поэтому в пределе справедливо

$$\lim_{x_1 \rightarrow -0} \frac{x_2}{x_1} = \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{(t_2(t_1) - t_0)/\|\mathbf{y}'(t_0)\|}{(t_1 - t_0)/\|\mathbf{y}'(t_0)\|} = \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{t_2(t_1) - t_0}{t_1 - t_0}.$$

Аналогично покажем, что уравнения (3.4) и (3.7) совпадают с точностью до умножения их частей на ненулевую константу. Из тех же соображений, что и в предыдущем абзаце, имеет место

$$\begin{aligned} k'(t - 0) &= k'(x - 0)/\|\mathbf{y}'(t_0)\| = y'''(x - 0)/\|\mathbf{y}'(t_0)\|, \\ k'(t + 0) &= k'(x + 0)/\|\mathbf{y}'(t_0)\| = y'''(x + 0)/\|\mathbf{y}'(t_0)\|. \end{aligned}$$

Значит уравнение (3.4) получается из (3.7) умножением на  $\|\mathbf{y}'(t_0)\|$ .  $\square$

**С л е д с т в и е 3.1.** Пусть  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(t_0)$  — псевдовершина множества  $M$ . При этом в точке  $t_0$  выполняется  $\|\mathbf{y}'(t_0)\| \neq 0$  и определены односторонние пределы производной кривизны  $k'(t_0 - 0) = 0$  и  $k'(t_0 + 0) \neq 0$ . Тогда для параметров  $t_1 < t_0 < t_2$ , задающих координаты проекций точек биссектрисы, выполняется предельное соотношение

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{t_2(t_1) - t_0}{t_1 - t_0} = 0. \quad (3.15)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Уравнение (3.4) при данных условиях принимает вид

$$k'(t_0 + 0)c^3 - 3k'(t_0 + 0)c^2 = 0. \quad (3.16)$$

У него есть ровно два совпадающих корня  $c_{1,2} = 0$  и один  $c_3 = 3$ . Но поскольку  $t_1 < t_0 < t_2$ , значение предела (3.3) не может быть положительным. Значит  $c = 0$ , что и означает справедливость равенства (3.15).

**С л е д с т в и е 3.2.** Пусть  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(t_0)$  — псевдовершина множества  $M$ . При этом в точке  $t_0$  выполняется  $\|\mathbf{y}'(t_0)\| \neq 0$  и определены односторонние пределы производной кривизны  $k'(t_0 - 0) \neq 0$  и  $k'(t_0 + 0) = 0$ . Тогда для параметров  $t_1 < t_0 < t_2$ , где  $t_2 = t_2(t_1)$ , задающих координаты проекций точек биссектрисы, выполняется предельное соотношение

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{t_1 - t_0}{t_2(t_1) - t_0} = 0. \quad (3.17)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Предельное соотношение можно записать в виде

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{t_1 - t_0}{t_2(t_1) - t_0} = \bar{c}. \quad (3.18)$$

По аналогии с результатом теоремы 3.1 можно показать, что значение (3.18) есть один из корней уравнения

$$k'(t_0 - 0)\bar{c}^3 - k'(t_0 - 0)\bar{c}^2 + 3k'(t_0 + 0)\bar{c} - k'(t_0 + 0) = 0.$$

При  $k'(t_0 + 0) = 0$  по аналогии с (3.16) оно принимает вид

$$k'(t_0 - 0)\bar{c}^3 - k'(t_0 - 0)\bar{c}^2 = 0.$$

Единственный его неотрицательный корень — это  $\bar{c} = 0$ . Подставив значение  $\bar{c} = 0$  в (3.18), получаем (3.17).  $\square$



## § 4. Численные методы построения рассеивающих линий

Для решения задачи быстрого действия возможно создание вычислительных алгоритмов построения рассеивающих кривых и оптимальных траекторий, выходящих из них. Ограничимся в дальнейшем при численной реализации алгоритмов случаем, когда кривая  $\Gamma$  есть график функции  $y = y(x)$ . Можно получить оценку для предельного соотношения координат проекций точек биссектрисы через производные функции  $y(x)$ .

**Утверждение 4.1.** Пусть множество  $M$  — подграфик функции  $y = y(x)$  с замкнутой областью определения  $X \subseteq \mathbb{R}$ . Пусть функция  $y = y(x)$  дважды дифференцируема на своей области определения, и трижды дифференцируема на ней, за исключением, может быть, конечного числа точек. Тогда, если точка  $(x_0, y(x_0))$  есть псевдовершина множества  $M$ , то для абсцисс  $x_1 < x_0 < x_2$  проекций точек биссектрисы  $L(M)$  справедливы следующие утверждения:

1) если

$$y'''(x_0 + 0)(1 + y'(x_0)^2) - 3y''(x_0)^2 y'(x_0) \neq 0 \quad (4.1)$$

и

$$y'''(x_0 - 0)(1 + y'(x_0)^2) - 3y''(x_0)^2 y'(x_0) \neq 0, \quad (4.2)$$

то имеет место предел

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \frac{x_2(x_1) - x_0}{x_1 - x_0} = c, \quad (4.3)$$

где  $c$  — неположительный корень уравнения

$$c^3 - 3c^2 + 3\beta c - \beta = 0, \quad (4.4)$$

$$\beta = \frac{y'''(x_0 - 0)(1 + y'(x_0)^2) - 3y''(x_0)^2 y'(x_0)}{y'''(x_0 + 0)(1 + y'(x_0)^2) - 3y''(x_0)^2 y'(x_0)};$$

2) если справедливо неравенство (4.2) и

$$y'''(x_0 + 0)(1 + y'(x_0)^2) - 3y''(x_0)^2 y'(x_0) = 0,$$

то имеет место предел

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \frac{x_1 - x_0}{x_2(x_1) - x_0} = 0; \quad (4.5)$$

3) если справедливо неравенство (4.1) и

$$y'''(x_0 - 0)(1 + y'(x_0)^2) - 3y''(x_0)^2 y'(x_0) = 0,$$

то имеет место предел

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \frac{x_2(x_1) - x_0}{x_1 - x_0} = 0. \quad (4.6)$$

**Доказательство.** В случае 1) согласно теореме 3.1 значение предела (4.3) равно неположительному корню уравнения (3.4). Покажем, что уравнения (3.4) и (4.4) эквивалентны. Если считать параметром  $t$  абсциссу  $x$  точек, являющихся проекциями точек биссектрисы, то разделив обе части уравнения (3.4) на  $k'(x_0 + 0)$ , получим

$$c^3 - 3c^2 + 3 \frac{k'(x_0 - 0)}{k'(x_0 + 0)} c - \frac{k'(x_0 - 0)}{k'(x_0 + 0)} = 0. \quad (4.7)$$

Для односторонних производных кривизны справедливы формулы (3.8) и (3.9). По условию (4.1) предложения имеет место неравенство  $k'(x_0 + 0) \neq 0$ . Значит, определено соотношение

$$\frac{k'(x_0 - 0)}{k'(x_0 + 0)} = \frac{y'''(x - 0)(1 + y'(x)^2) - 3y''(x)y'(x)}{(1 + y'(x)^2)^{5/2}} \bigg/ \frac{y'''(x + 0)(1 + y'(x)^2) - 3y''(x)y'(x)}{(1 + y'(x)^2)^{5/2}} = \beta.$$

Оно означает, что правая часть уравнения (4.7) определена и совпадает с правой частью (4.4). Следовательно, множества корней уравнения (3.4) и (4.4) совпадают.

Случай 2) означает ситуацию, при которой согласно формулам (3.8) и (3.9) имеет место, исходя из (4.1), неравенство  $k'(x_0 + 0) \neq 0$  и (поскольку (4.2) не выполняется) равенство  $k'(x_0 + 0) = 0$ . Данный случай описан в следствии 3.1 из теоремы 3.1. Если в предельном соотношении (3.15) в качестве параметра  $t$  взять абсциссу  $x$  точки кривой  $\Gamma$ , то оно принимает вид (4.5). Аналогично в случае 3) можно показать, что равенство (4.6) следует из (3.15), поскольку в этом случае может быть применено следствие 3.2 из теоремы 3.1.  $\square$

**З а м е ч а н и е.** В утверждении не рассматривается случай, при котором в псевдовершине не выполняются ни неравенство (4.1), ни (4.2). Он был рассмотрен ранее в работе [14], и означает что кривизна  $k(x)$  является дифференцируемой и для ее производной справедливо равенство (3.2). В этом случае, согласно формуле (3.1), имеет место

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \frac{x_1 - x_0}{x_2(x_1) - x_0} = -1.$$

Ранее авторы разрабатывали алгоритмы построения рассеивающей кривой с помощью решения дифференциального уравнения, связывающего координаты проекций ее точек. Для его реализации необходимо найти координаты псевдовершины и соответствующей ей крайней точки биссектрисы. При этом знание маркера дает возможность доопределить значение производных функции  $x_2 = x_2(x_1)$  (или  $x_1 = x_1(x_2)$ ) при  $x_1 = x_2 = x_0$ .

Если в псевдовершине  $(x_0, y(x_0))$  выполняются условия утверждения 4.1, то в некоторой ее окрестности можно находить абсциссы точек, в которые приходят оптимальные траектории от рассеивающей кривой, как решение задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{dx_2}{dx_1} = g(x_1, x_2), \\ x_2(x_0) = x_0, \end{cases} \quad (4.8)$$

где

$$g(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{\frac{y''(x_1)}{1 + y'(x_1)^2} - 2 \frac{(x_2 - x_1)y(x_1) - (y(x_2) - y(x_1))}{(x_2 - x_1)^2 + (y(x_2) - y(x_1))^2}}{2 \frac{(x_2 - x_1)y'(x_2) - (y(x_2) - y(x_1))}{(x_2 - x_1)^2 + (y(x_2) - y(x_1))^2} - \frac{y''(x_2)}{1 + y'(x_2)^2}}, & x_1 < x_0 < x_2; \\ c, & x_1 = x_2 = x_0; \end{cases} \quad (4.9)$$

$c$  — неположительный корень уравнения (4.4), см. [2, 9].

**Т е о р е м а 4.1.** Пусть  $(x_0, y(x_0))$  — псевдовершина множества  $M$ , в которой выполняются условия утверждения 4.1. Тогда среди решений уравнения (4.4) есть ровно один действительный отрицательный корень.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Обозначим  $P(c)$  правую часть уравнения (4.4). Заметим, что  $P(c)$  — это полином степени 3 с действительными коэффициентами, значит у него может быть один или три действительных корня. Обозначим  $C$  множество корней (4.4). Поскольку в псевдовершине модуль кривизны достигает локального максимума, то значения односторонних производных кривизны  $k'(x_0 + 0)$  и  $k'(x_0 - 0)$  должны иметь разный знак (иначе  $k(x)$  была бы в точке  $x_0$  монотонно возрастающей или убывающей функцией). Значит, для их отношения выполняется оценка  $\beta < 0$ . Поэтому для значения полинома  $P(c)$  справедлива оценка

$$P(0) = \beta > 0. \quad (4.10)$$

При этом, поскольку коэффициент при старшем члене положительный,

$$\lim_{c \rightarrow -\infty} P(c) = -\infty. \quad (4.11)$$

Поскольку полином  $P(c)$  — непрерывная функция, то из (4.10) и (4.11) вытекает, что у него есть как минимум один корень на интервале  $(-\infty, 0)$ .

Обозначим элементы множества корней  $C$  как  $c_1, c_2, c_3$ . Для их суммы справедливо по формуле Виета (см. [15]) равенство

$$c_1 + c_2 + c_3 = 3, \quad (4.12)$$

значит все три они не могут быть отрицательными действительными. Для произведения элементов  $C$  справедливо

$$c_1 c_2 c_3 = \beta < 0.$$

Если все корни действительные, то отрицательных среди них может быть только нечетное число. Либо три (что противоречит (4.12)), либо один. Поэтому уравнение (4.4) имеет ровно один действительный отрицательный корень, а остальные два либо положительные, либо комплексно сопряженные.  $\square$

Теорема 4.1 позволяет гарантировать, что значение функции (4.9) определяется единственным образом при  $x_1 = x_2 = x_0$ . Поэтому и решение задачи Коши (4.8), в которой начальное условие имеет вид  $x_2(x_0) = x_0$ , тоже является единственным (в некоторой окрестности точки  $x_0$ ).

## § 5. Примеры решения задач быстродействия

Разработанный авторами программный комплекс [16] модернизирован для решения задач быстродействия с границей целевого множества, имеющей псевдовершины, в которых кривизна определена, но ее производная имеет разрыв. Разработаны процедуры вычисления предельного значения отношения (3.5) для параметров, задающих координаты проекций точек биссектрисы в окрестности псевдовершины. Рассеивающая кривая строится путем решения задачи Коши (4.8), а на ее основе производится конструирование волновых фронтов — линий уровня функции оптимального результата  $u(x, y)$ . В свою очередь по ним конструируется график функции  $u(x, y)$  на заданной прямоугольной сетке.

**Пример 5.1.** Рассматривается задача быстродействия с динамикой (1.1), в которой целевое множество  $M$  есть подграфик функции

$$y(x) = \begin{cases} x^2 + 0.5x^3, & x \leq 0 \\ x^2 - x^3, & x > 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Требуется построить функцию оптимального результата в виде линий уровня и графика в трехмерном пространстве и выделить рассеивающую кривую.

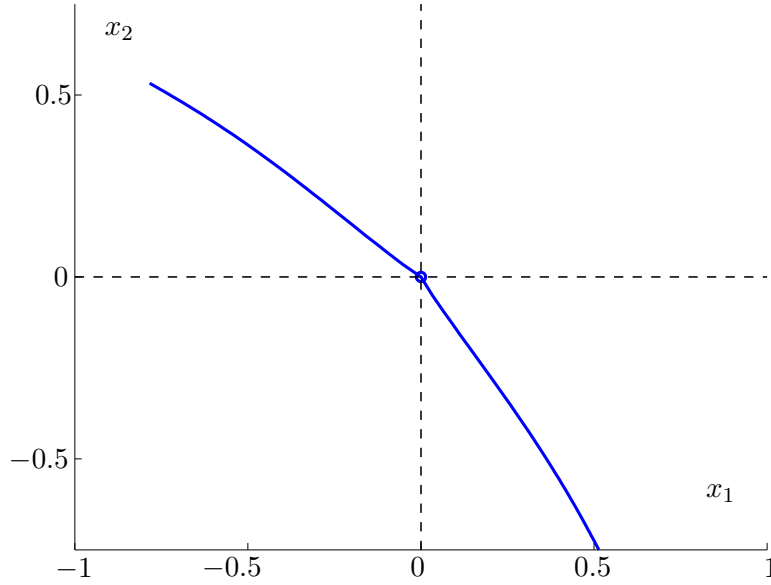
Анализ границы  $\Gamma$  целевого множества показывает, что на ней содержится одна псевдовершина  $(0, 0)$  — точка локального максимума кривизны. Соответствующая ей крайняя точка биссектрисы имеет координаты  $(0, 0.5)$ . При этом для производных функции (5.1) выполняются равенства при  $x = x_0 = 0$ :

$$\begin{aligned} y'''(+0)(1 + y'(0)^2) - 3y''(0)^2 y'(0) &= -6, \\ y'''(-0)(1 + y'(0)^2) - 3y''(0)^2 y'(0) &= 3. \end{aligned}$$

Значит, имеют место условия (4.1) и (4.2) предложения 4.1. Поэтому предельное отношение для координат проекций в точке  $x = 0$  равно неположительному корню уравнения (4.4) при  $\beta = 3/(-6) = -0.5$ :

$$c^3 - 3c^2 - 4.5c + 1.5 = 0. \quad (5.2)$$

Массив приближенных корней уравнения (5.2)  $C = \{3.3981, -0.6312, 0.2331\}$ . В соответствии с результатом теоремы 4.1 в  $C$  содержится ровно одно вещественное отрицательное число. Значение маркера (4.3)  $c \approx -0.6312$ . График зависимостей между абсциссами  $x_1$  и  $x_2$  в окрестности псевдовершины представлен на рис. 1. В псевдовершине имеет место излом, обусловленный тем, что  $c \neq -1$ . Предельное значение тангенса угла касательной к графику функции  $x_2 = x_2(x_1)$ , вычисленное программным комплексом, равно  $c^* \approx -0.64$ ,  $c^* \approx c$ . Граница  $\Gamma$  целевого множества, заданная уравнением (5.1), рассеивающая кривая  $L(M)$  и линии уровня  $\Phi$  функции оптимального результата (с шагом  $h_\rho = 0.2$ ) представлены на рис. 2. График функции  $u(x, y)$  оптимального результата на сетке с ячейками  $0.05 \times 0.05$  представлен на рис. 3.



**Рис. 1.** Непрерывная склейка графиков абсцисс  $x_1 = x_1(x_2)$  и  $x_2 = x_2(x_1)$  проекций точек биссектрисы в окрестности псевдовершины  $(x_0, y(x_0)) = (0, 0)$  в примере 5.1

**Пример 5.2.** Рассматривается задача быстродействия с динамикой (1.1), в которой целевое множество  $M$  есть подграфик функции

$$y(x) = \begin{cases} 0.5(x-2)^2 + 0.5, & x \leq 1, \\ 1 - \ln x, & x > 1. \end{cases} \quad (5.3)$$

Как и в предыдущем примере, на границе  $\Gamma$  целевого множества содержится одна псевдовершина  $(1, 1)$ . Соответствующая ей крайняя точка биссектрисы имеет координаты  $(1 + 2\sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2})$ . Для производных функции (5.3) имеют место равенства при  $x = x_0 = 1$

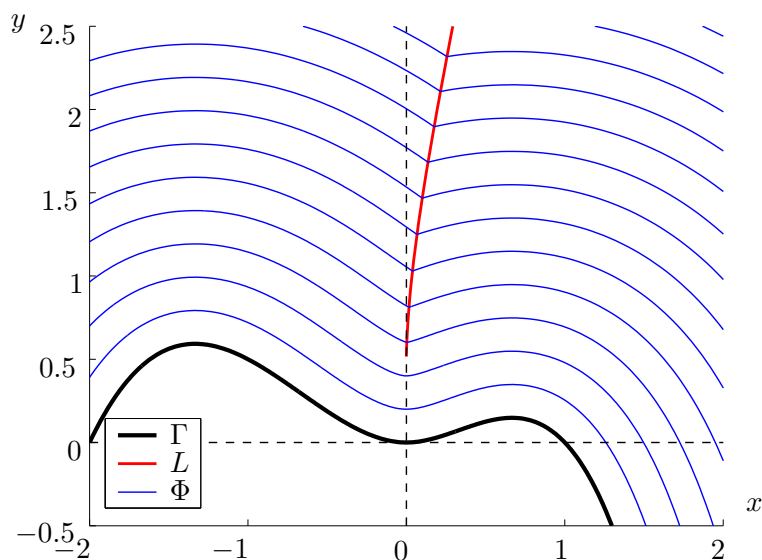
$$\begin{aligned} y'''(+0)(1 + y'(0)^2) - 3y''(0)^2 y'(0) &= -2(1 + (-1)^2) - 3 \cdot 1^2 \cdot (-1) = -1, \\ y'''(-0)(1 + y'(0)^2) - 3y''(0)^2 y'(0) &= 0 - 3 \cdot 1^2 \cdot (-1) = 3. \end{aligned}$$

Они означают выполнение условий утверждения 4.1, как и в предыдущем примере. Поэтому предельное отношение в точке  $x_0 = 1$  равно неположительному корню уравнения (4.4) при  $\beta = -3/1 = -3$ :

$$c^3 - 3c^2 - 9c + 3 = 0. \quad (5.4)$$

Массив приближенных значений корней уравнения (5.4)  $C = \{4.5446, -2.3776, 0.8329\}$ . Маркер (4.3) равен единственному отрицательному элементу  $C$ ,  $c \approx -2.3776$ . График зависимостей между абсциссами  $x_1$  и  $x_2$  в окрестности псевдовершины представлен на рис. 4. В псевдовершине имеет место излом, обусловленный тем, что  $c \neq -1$ . Предельное значение тангенса угла касательной к графику функции  $x_2 = x_2(x_1)$ , вычисленное программным комплексом равно  $c^* \approx -2.4$ ,  $c^* \approx c$ . Граница  $\Gamma$  целевого множества, заданная уравнением (5.3), рассеивающая кривая  $L(M)$  и линии уровня  $\Phi$  функции оптимального результата (с шагом  $h_\rho = 0.15$ ) представлены на рис. 5. График функции  $u(x, y)$  оптимального результата на сетке с ячейками  $0.05 \times 0.05$  представлен на рис. 6.

Примеры иллюстрируют справедливость доказанных теорем и утверждения и демонстрируют возможности программного комплекса. Пример 5.1 является в большей степени иллюстративным, в нем нарушение гладкости кривизны границы целевого множества обусловлено подбором склейки графиков полиномов, коэффициенты которых выбраны так, чтобы в точке  $x_0$  была определена производная  $y''(x_0)$ , но предельные значения производной третьего порядка различались. Пример 5.2 показывает более общий случай, когда в псевдовершине склеиваются графики функций разной природы: алгебраической и логарифмической.



**Рис. 2.** Кривая  $\Gamma$ , сечения  $\Phi$  множества управляемости и сингулярное множество  $L$  в примере 5.1

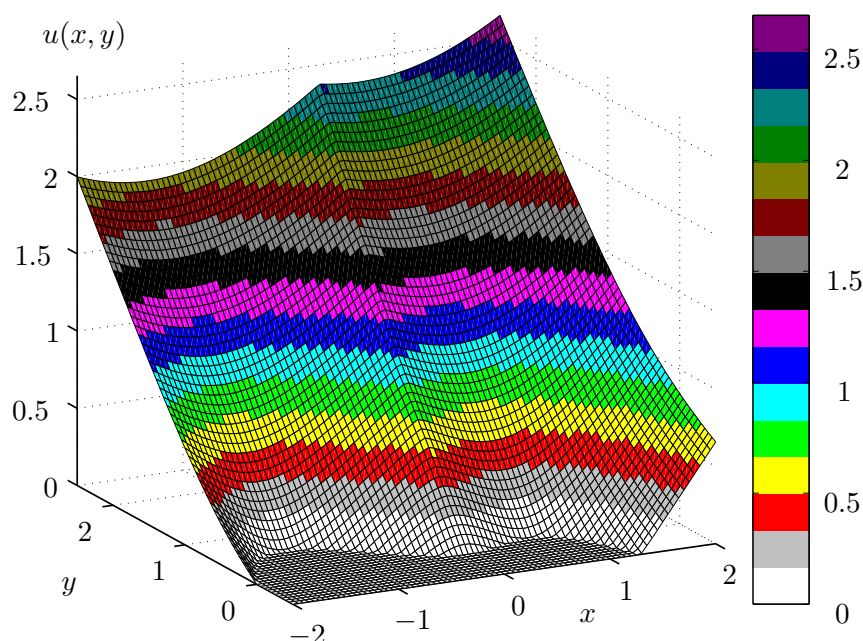
## § 6. Заключение

В работе исследована задача быстродействия с круговой вектограммой скоростей и особенностями кривизны границы  $\Gamma$  целевого множества. Они заключаются в том, что в характеристических точках  $\Gamma$ , псевдовершинах  $y_0 = y(t_0)$ , кривизна  $k(t)$  определена, но ее односторонние производные слева  $k'(t_0 - 0)$  и справа  $k'(t_0 + 0)$  не совпадают. Данная ситуация является в некотором смысле промежуточной между случаем псевдовершины, в которой кривизна определена и является дифференцируемой, и случаем, когда определены односторонние пределы кривизны слева  $k(t_0 - 0)$  и справа  $k(t_0 + 0)$  и они различаются (подробнее о последнем случае см. [17, теорема 3]). Установлена связь предельного соотношения (маркера)  $s$  для координат проекций точек биссектрисы  $L(M)$  в окрестности  $y_0$  с решением кубического уравнения, коэффициенты которого зависят от односторонних производных. Для случая, когда  $\Gamma$  есть график функции  $y = y(x)$  найдено значение предельного соотношения абсцисс  $x_1$  и  $x_2$  точек, в которые приходят оптимальные траектории от рассеивающей кривой, как решение кубического уравнения, коэффициенты которого зависят от производных функции  $y = y(x)$  первого и второго порядка, и от односторонних производных третьего порядка  $y'''(x_0 - 0)$  и  $y'''(x_0 + 0)$  в псевдовершине, имеющей координаты  $(x_0, y(x_0))$ . Доказано, что среди корней уравнения ровно один является отрицательным действительным числом. Предложен алгоритм построения биссектрисы на базе решения задачи Коши для уравнения, связывающего абсциссы проекций точек биссектрисы. Проведено моделирование решения двух задач быстродействия на базе отыскания псевдовершины и построения рассеивающей кривой. Выполнена визуализация результатов в виде карт линий уровня функции оптимального результата с заданным шагом на плоскости и ее графика в трехмерном пространстве.

**Финансирование.** Исследование Лебедева П. Д. поддержано грантом Российского Научного Фонда, проект № 19-11-00105.

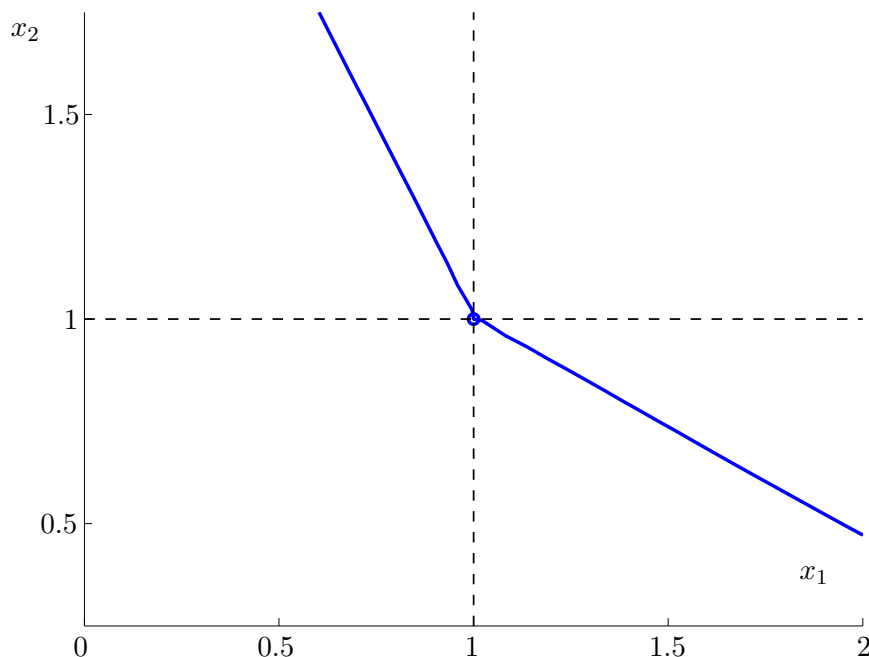
## Список литературы

1. Лебедев П.Д., Успенский А.А. Аналитическое и численное конструирование функции оптимального результата для одного класса задач быстродействия // Прикладная математика и информатика: труды факультета ВМК Моск. ун-та. 2007. № 27. С. 65–79.
2. Лебедев П.Д., Успенский А.А. Геометрия и асимптотика волновых фронтов // Изв. вузов. Матем. 2008. № 3 (550). С. 27–37. <http://mi.mathnet.ru/ivm1241>



**Рис. 3.** График функции оптимального результата  $u(x, y)$  в примере 5.1

3. Субботин А.И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 336 с.
4. Кружков С.Н. Обобщенные решения уравнений Гамильтона–Якоби типа эйконала. I. Постановка задач, теоремы существования, единственности и устойчивости, некоторые свойства решений // Математический сборник. 1975. Т. 98 (140). № 3 (11). С. 450–493.
5. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981.
6. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
7. Арнольд В.И. Особенности каустик и волновых фронтов. М.: ФАЗИС, 1996.
8. Седых В.Д. О топологии волновых фронтов в пространствах небольших размерностей // Изв. РАН. Сер. матем. 2012. Т. 76. Вып. 2. С. 171–214. <https://doi.org/10.4213/im4572>
9. Лебедев П.Д., Успенский А.А. Построение функции оптимального результата и рассеивающих линий в задачах быстрогодействия с невыпуклым целевым множеством // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22. № 2. С. 188–198. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2016-22-2-188-198>
10. Успенский А.А., Лебедев П.Д. Выявление сингулярности обобщенного решения задачи Дирихле для уравнения типа эйконала в условиях минимальной гладкости границы краевого множества // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 1. С. 59–73. <https://doi.org/10.20537/vml180106>
11. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. М.: Едиториал УРСС, 2003.
12. Успенский А.А., Лебедев П.Д. О множестве предельных значений локальных диффеоморфизмов при эволюции волновых фронтов // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 1. С. 171–185.
13. Ушаков В.Н., Успенский А.А., Лебедев П.Д. Геометрия сингулярных кривых для одного класса задач быстрогодействия // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2013. Вып. 3. С. 157–167.
14. Успенский А.А., Лебедев П.Д. Построение функции оптимального результата в задаче быстрогодействия на основе множества симметрии // Автоматика и телемеханика. 2009. Вып. 7. С. 50–57.



**Рис. 4.** Непрерывная склейка графиков абсцисс  $x_1 = x_1(x_2)$  и  $x_2 = x_2(x_1)$  проекций точек биссектрисы в окрестности псевдовершины  $(x_0, y(x_0)) = (1, 1)$  в примере 5.2.

15. Винберг Э.Б. Алгебра многочленов. Учебное пособие для студентов-заочников III–IV курсов физико-математических факультетов педагогических институтов. М.: Просвещение, 1980.
16. Лебедев П.Д., Успенский А.А. Программа построения волновых фронтов и функции евклидова расстояния до компактного невыпуклого множества. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017662074 от 27.10.2017.
17. Лебедев П.Д., Успенский А.А. Конструирование негладкого решения задачи управления по быстродействию при низком порядке гладкости границы целевого множества // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 1. С. 108–119.  
<https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-1-108-119>

Поступила в редакцию 02.05.2019

Лебедев Павел Дмитриевич, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16; старший научный сотрудник, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.

E-mail: pleb@yandex.ru

Успенский Александр Александрович, д. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.

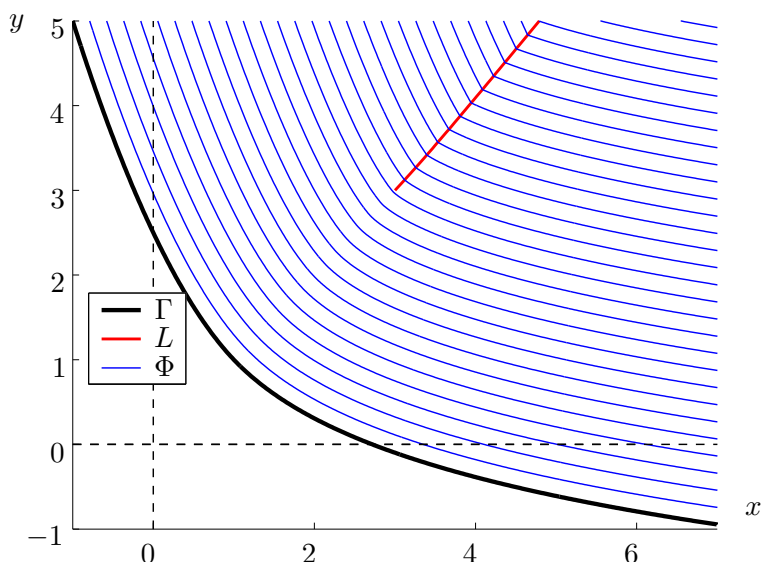
ведущий научный сотрудник, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.

E-mail: uspen@imm.uran.ru

**P. D. Lebedev, A. A. Uspenskii**

**Construction of a solution to a velocity problem in the case of violation of the smoothness of the curvature of the target set boundary**

**Citation:** *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Univversiteta*, 2019, vol. 53, pp. 98–114 (in Russian).



**Рис. 5.** Кривая  $\Gamma$ , сечения  $\Phi$  множества управляемости и сингулярное множество  $L$  в примере 5.2

*Keywords:* velocity problem, dispersing curve, bisector of a set, pseudovertex, optimal result function, curvature.

MSC2010: 35A18

DOI: 10.20537/2226-3594-2019-53-09

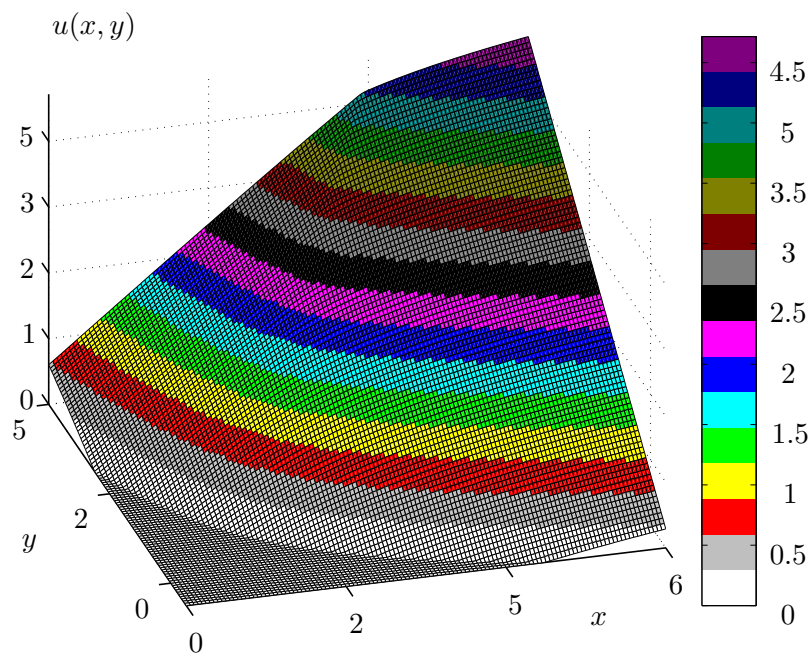
For the development of analytical and numerical algorithms for constructing nonsmooth solutions of optimal control problems, procedures are proposed for constructing scattering curves for a single class of control velocity problems. We consider the reduction problems for a minimal time of solutions of a dynamical system with a circular velocity vectogram for the case where the target set is generally nonconvex, and its boundary has points at which the curvature smoothness is violated. These points are referred to as pseudovertexes, the characteristic points of the target set, which are responsible for the occurrence of the singularity of the optimal result function. When forming a proper reparameterization (in this case, taking into account the geometry of the velocity vector diagram) of the arc of the boundary of the target set containing a pseudovertex, the scattering curve is constructed as an integral curve. Moreover, the initial conditions of the corresponding Cauchy problem are determined by the properties of the pseudovertex. One of the numerical characteristics of the pseudovertex, the pseudovertex marker, determines the initial velocity of the material point describing a smooth portion of the scattering curve. This approach to the identification and construction (in analytical or numerical form) of singular curves was previously substantiated for a number of cases of a target boundary that are different in the order of smoothness. It should be emphasized that the case considered in this paper is the most specific, in particular, because of the revealed connection between the dynamic problem and the problem of polynomial algebra. It is proved that the pseudovertex marker is the nonpositive root of some third-order polynomial whose coefficients are determined by the one-sided derivatives of curvatures of the pseudovertex of the target set. The effectiveness of the developed theoretical methods and numerical procedures is illustrated by specific examples.

**Funding.** P. Lebedev's research is supported by the Russian Science Foundation (project no. 19-11-00105).

## REFERENCES

1. Lebedev P.D., Uspenskii A.A. Analytical and numerical construction of the optimal outcome function for a class of time-optimal problems, *Computational Mathematics and Modeling*, 2008, vol. 19, no. 4, pp. 375–386. <https://doi.org/10.1007/s10598-008-9007-9>
2. Lebedev P.D., Uspenskii A.A. Geometry and asymptotics of wavefronts, *Russian Mathematics*, 2008, vol. 52, issue 3, pp. 24–33. <https://doi.org/10.3103/S1066369X08030031>





**Рис. 6.** График функции оптимального результата  $u(x, y)$  в примере 5.2

3. Subbotin A.I. *Generalized solutions of first order PDEs: the dynamical optimization perspective*, Boston: Birkhäuser, 1995, XII+314 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0847-1>
4. Kružkov S.N. Generalized solutions of the Hamilton–Jacobi equations of eikonal type. I. Formulation of the problems; existence, uniqueness and stability theorems; some properties of the solutions, *Mathematics of the USSR–Sbornik*, 1975, vol. 27, no. 3, pp. 406–446. <https://doi.org/10.1070/SM1975v027n03ABEH002522>
5. Dem’yanov V.F., Vasil’ev L.V. *Nedifferentsiruemaya optimizatsiya* (Non-differentiable optimization), Moscow: Nauka, 1981, 384 p.
6. Isaacs R. *Differential games*, N.Y.: John Wiley and Sons, 1965.
7. Arnold V.I. *Singularities of caustics and wave fronts*, Dordrecht: Springer, 1990. <https://doi.org/10.1007/978-94-011-3330-2>
8. Sedykh V.D. On the topology of wave fronts in spaces of low dimension, *Izvestiya: Mathematics*, 2012, vol. 76, no. 2, pp. 375–418. <https://doi.org/10.1070/IM2012v076n02ABEH002588>
9. Lebedev P.D., Uspenskii A.A. Construction of the optimal result function and dispersing lines in time-optimal problems with a nonconvex target set, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2016, vol. 22, no. 2, pp. 188–198 (in Russian). <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2016-22-2-188-198>
10. Uspenskii A.A., Lebedev P.D. Identification of the singularity of the generalized solution of the Dirichlet problem for an eikonal type equation under the conditions of minimal smoothness of a boundary set, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp’yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 1, pp. 59–73 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/vm180106>
11. Rashevskii P.K. *A course in differential geometry*, Moscow: URSS, 2003.
12. Uspenskii A.A., Lebedev P.D. On the set of limit values of local diffeomorphisms in wavefront evolution, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2011, vol. 272, suppl. 1, pp. 255–270. <https://doi.org/10.1134/S0081543811020180>
13. Ushakov V.N., Uspenskii A.A., Lebedev P.D. Geometry of singular curves for one class of velocity, *Vestnik Sankt-Peterburgskogo Universiteta. Seriya 10. Prikladnaya Matematika. Informatika. Protsessy Upravleniya*, 2013, issue 3, pp. 157–167 (in Russian).
14. Uspenskii A.A., Lebedev P.D. Construction of the optimal outcome function for a time-optimal problem on the basis of a symmetry set, *Automation and Remote Control*, 2009, vol. 70, issue 7, pp. 1132–1139. <https://doi.org/10.1134/S0005117909070054>

15. Vinberg E.B. *Algebra mnogochlenov* (Algebra of polynomials), Moscow: Prosveshchenie, 1980.
16. Lebedev P.D., Uspenskii A.A. *Program for constructing wave fronts and functions of the Euclidean distance to a compact nonconvex set*. Certificate of state registration of the computer program no. 2017662074, October 27, 2017.
17. Lebedev P.D., Uspenskii A.A. Construction of a nonsmooth solution in a time-optimal problem with a low order of smoothness of the boundary of the target set, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2019, vol. 25, no. 1, pp. 108–119 (in Russian).  
<https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-1-108-119>

Received 02.05.2019

Lebedev Pavel Dmitrievich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Department of Dynamical Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia;

Senior Researcher, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.

E-mail: pleb@yandex.ru

Uspenskii Aleksandr Aleksandrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher, Department of Dynamical Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia;

Leading Researcher, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.

E-mail: uspen@imm.uran.ru